University of Applied Sciences

APOLLON Hochschule der Gesundheitswirtschaft

# Grundlagen der Wirtschaftsmathematik

University of Applied Sciences
APOLLON Hochschule
der Gesundheitswirtschaft

**Petra Leitert**

# Grundlagen der Wirtschaftsmathematik

## MAÖKH01

**Prof. Dr. Petra Leitert**

(geb. 1960) studierte nach ihrem Abitur Mathematik an der Humboldt Universität zu Berlin. Von 1985 bis 1990 arbeitete sie als wissenschaftliche Assistentin an der Universität Rostock, absolvierte ein Zusatzstudium der Wirtschaftswissenschaften und promovierte zum Dr. oec. In ihrer Doktorarbeit untersuchte sie Möglichkeiten des Einsatzes bedienungstheoretischer Modelle in der Hafenwirtschaft (Naßbaggerung). Im Anschluss daran arbeitete sie als Dozentin in der Erwachsenenqualifizierung. Seit 1992 ist Frau Dr. Leitert als Privatdozentin für Mathematik, Informatik, Volks- und Betriebswirtschaft sowie Rechnungswesen tätig. Zudem ist sie geschäftsführende Gesellschafterin einer Unternehmensberatung, die sich schwerpunktmäßig mit der Begleitung von Existenzgründungen und Controllingfragen beschäftigt. Im November 2011 nahm sie die Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin an der Hochschule Wismar auf, wurde 2013 zur Professorin berufen und ist seitdem für die Mathematikausbildung an der wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät verantwortlich.

Für die APOLLON Hochschule ist sie seit 2009 als Tutorin für Mathematik aktiv.

# Grundlagen der Wirtschaftsmathematik

## Inhaltsverzeichnis



0617K02

# Einleitung

Liebe Studierende,

mit diesem Studienheft starten Sie nun in die Mathematikausbildung. Die Mathematik, die bei vielen Studierenden nicht unbedingt die angenehmsten Erinnerungen aus der Schulzeit weckt, gilt es im Fernstudium zum großen Teil selbstständig zu bewältigen. Um Ihnen den Einstieg zu erleichtern, beinhaltet das vorliegende Studienheft die Grundlagen der Mathematik, von denen Sie viele noch aus der Schule kennen.

Im ersten Kapitel beschäftigen Sie sich zunächst mit den Grundlagen der Mengenlehre. Deren Begriffe werden Sie immer wieder in den nachfolgenden Themenbereichen benötigen.

Im zweiten Kapitel können Sie die Grundlagen der Arithmetik wiederholen. Das Wort Arithmetik kommt aus dem Griechischen und bedeutet „die zahlenmäßige Kunst". Um das Rechnen mit Zahlen wird es in diesem Kapitel auch gehen. Da Sie mit sehr unterschiedlichen Voraussetzungen zum Studium kommen, erhalten Sie hier noch einmal eine ausführliche Vorstellung der wichtigsten Rechenarten mit den verschiedenen Rechenregeln. Vieles wird Ihnen bekannt sein, aber Sie finden auch Zusammenhänge, die Ihnen vielleicht nicht mehr so vertraut sind. *Gauß* hat die Arithmetik als „Königin der Mathematik" bezeichnet, weil alle anderen Gebiete der Mathematik auf den Regeln der Arithmetik aufbauen. Dies zeigt, wie wichtig dieses Wissen für die Bearbeitung und das Verständnis der nachfolgenden Kapitel und Studienhefte ist.

Eng verbunden mit der Arithmetik ist die Algebra. Sie beschäftigt sich mit den Eigenschaften von Rechenoperationen und dem Rechnen mit Unbekannten in Gleichungen. Deshalb befasst sich das dritte Kapitel mit dem Rechnen und Umformen von Gleichungen mit Variablen. Darüber hinaus lernen Sie lineare Gleichungssysteme und deren bekannteste Lösungsverfahren kennen.

Um Ihnen das Selbststudium der Mathematik zu erleichtern, wurden die Erklärungen mit vielen Beispielen und Übungsaufgaben ergänzt. Auch wenn die Mathematik eventuell nicht zu Ihren Lieblingsfächern gehört, versuchen Sie mit Interesse, Neugierde und Freude diese Hefte durchzuarbeiten. Es ist nicht ungewöhnlich, dass Sie bei einem neuen Thema einen Abschnitt auch mehrmals lesen müssen, bevor er verständlich wird. Versuchen Sie immer, die Erklärungen mithilfe der vielen begleitenden Beispiele zu verstehen. Und wenn es doch mal nicht so richtig vorwärts geht, holen Sie sich fachliche und auch moralische Unterstützung über den Online-Campus der Hochschule.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg und Spaß mit dem Fach Mathematik.

# 1 Einführung in die Mengenlehre

*Zum Start in Ihre Mathematikausbildung erhalten Sie in diesem ersten Kapitel eine Einführung in die Mengenlehre. Sie erfahren:*

- *wie der Begriff der Menge in der Mathematik definiert ist,*
- *welche Möglichkeiten der mathematischen Darstellung es gibt und*
- *welche Operationen mit Mengen möglich sind.*

## 1.1 Anliegen und Begriffe der Menge

Der Begriff Menge ist ein festes Wort in unserem Sprachgebrauch. Jeder von Ihnen hat eine Vorstellung, was eine Menge ist. Häufig ist dabei die Beschreibung der Menge aber recht ungenau. Dennoch versteht jeder von Ihnen die grobe Aussage: „Es sind eine Menge Studenten zum Einführungsseminar erschienen."

In der Mathematik wird dieser Begriff häufig benötigt, um den Umfang von Objekten zu beschreiben, die mindestens ein gemeinsames Merkmal aufweisen. Nur wird er hier klarer definiert und die einzelnen Mengen exakt beschrieben. Der Begründer der Mengenlehre ist der deutsche Mathematiker *Georg Cantor* (1845–1918). Die von ihm eingeführte Symbolik und Klassifizierung der Mengen sowie die wichtigsten Ergebnisse seiner Forschungstätigkeit haben noch heute Gültigkeit.

**Menge**

Eine Menge M ist nach Cantor die Gesamtheit bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen, wobei von jedem dieser Objekte eindeutig feststeht, ob es dazu gehört oder nicht. Die Objekte heißen Elemente.

Mathematisch klassifiziert man Mengen nach ihrem Umfang. Dabei benutzt man den Begriff der Mächtigkeit einer Menge.

**Mächtigkeit der Menge**

Die Mächtigkeit einer Menge M ist die Anzahl der Elemente der Menge M.

In der Mathematik tauchen immer wieder Mengen auf, die kein Element besitzen. Sie werden als leere Mengen oder Leermengen bezeichnet.

**Leere Menge**

Die Menge M heißt leer, wenn sie kein Element enthält. Beschrieben wird die leere Menge mit dem Symbol {} oder Ø: M = {} = Ø.

**Beispiel 1.1:**

Die Menge der Fernstudierenden der APOLLON Hochschule ist mächtiger als die Menge der weiblichen Studierenden der Hochschule. Die Menge der APOLLON Studierenden, die unter 10 Jahren alt sind, ist eine leere Menge. Da es keine Studierenden unter 10 Jahren an der Hochschule und somit kein Element in der Menge gibt, ist die Menge leer.

Ist eine Menge nicht leer, unterscheidet man endliche und unendliche Mengen. Bei den unendlichen Mengen gibt es noch eine weitere Unterteilung. Sie werden eingeteilt in abzählbar und nicht abzählbar unendliche Mengen. Eine abzählbar unendliche Menge ist eine Menge, bei der jedem Element der Menge genau eine natürliche Zahl und jeder natürlichen Zahl genau ein Element der Menge zugeordnet werden kann.

**Beispiel 1.2:**

Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist eine abzählbar unendliche Menge. Auch die Menge der geraden Zahlen ist eine abzählbar unendliche Menge. Dagegen ist die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ eine nicht abzählbar unendliche Menge. Zwischen zwei beliebigen reellen Zahlen – beispielsweise 1,01236 und 1,0124 – können Sie noch unendlich viele weitere Zahlen bestimmen. Das heißt, Sie können die Zahlen in dem angegebenen Bereich nicht abzählen.

## 1.2 Zahlenmengen

In Beispiel 1.2 sind bereits verschiedene Zahlenmengen genannt worden, die nun weiter vorgestellt werden. In der Mathematik werden die verschiedenen Zahlen in Zahlenbereiche eingeteilt. Diese Bereiche sind Zahlenmengen, die sich durch bestimmte Merkmale auszeichnen. Von den heute genutzten Zahlenbereichen waren lange Zeit nicht alle bekannt. Zunächst wurden nur die *natürlichen Zahlen* zum Zählen von Dingen genutzt. Später kamen die *ganzen Zahlen* (z.B. zum Darstellen von Schulden) sowie die *gebrochenen Zahlen* (zum Darstellen von Anteilen) hinzu.

Mit der Entwicklung der Mathematik wurden noch weitere Zahlenbereiche, die auf den bereits bekannten Zahlenmengen aufbauten, benötigt und somit definiert. Neue Zahlenbereiche stellten stets eine Erweiterung der bekannten Zahlenbereiche dar, indem sie die vorherigen Zahlenbereiche einschlossen. Die wichtigsten Zahlenbereiche, die Sie kennen sollten, sind die:

- natürlichen Zahlen
- ganzen Zahlen
- rationalen Zahlen
- reellen Zahlen

Zahlenbereiche werden mit festgelegten Großbuchstaben symbolisiert, die fett oder mit einem Doppelanstrich dargestellt werden. Alle Zahlenbereiche sind unendliche Mengen.

**Natürliche Zahlen**: Die Menge der natürlichen Zahlen wird mit dem Symbol **N** bzw. $\mathbb{N}$ dargestellt. Zu den natürlichen Zahlen gehören alle nicht negativen Zahlen, die ganzzahlig sind. Mit den natürlichen Zahlen sind nur die Addition und die Multiplikation uneingeschränkt durchführbar.

Mengendarstellung: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

**Ganze Zahlen**: Für die Mengendarstellung der ganzen Zahlen wird der Buchstabe **Z** bzw. $\mathbb{Z}$ genutzt. Elemente dieser Zahlenmenge sind neben den natürlichen Zahlen alle negativen ganzen Zahlen. Mit den ganzen Zahlen ist neben der Addition und Multiplikation nun auch die Subtraktion uneingeschränkt durchführbar.

Mengendarstellung: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

**Rationale Zahlen**: Der Buchstabe $\mathbb{Q}$ bzw. **Q** symbolisiert die Menge der rationalen Zahlen. Zu dieser Zahlenmenge gehören neben den ganzen Zahlen auch die gebrochenen Zahlen, die durch Brüche $\frac{p}{q}$ zweier ganzer Zahler p und q entstehen, wobei q nicht vom Wert Null ($q \neq 0$) sein darf. Ist die ganze Zahl q im Nenner eine 1, wird aus dem Bruch eine ganze Zahl $\left(\frac{8}{1} = 8\right)$. Die rationalen Zahlen können aber nicht nur durch einen Bruch, sondern auch als Dezimalzahl, d.h. mithilfe der Nachkommastellen dargestellt werden. Dabei können auch sich periodisch unendlich wiederholende Nachkommastellen auftreten. Mit den gebrochenen Zahlen können Addition, Multiplikation, Subtraktion und Division uneingeschränkt durchgeführt werden.

Mengendarstellung: $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | p,\ q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\}$

**Beispiel 1.3:**

**endliche Dezimalzahlen**:

$$\frac{1}{2} = 0{,}5;\ \frac{1}{10} = 0{,}1;\ \frac{3}{750} = 0{,}004;\ \frac{7}{1} = 7$$

**periodische unendliche Dezimalzahlen**:

$$\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}; \frac{1}{9} = 0{,}\overline{1};\ \frac{2}{375} = 0{,}005\overline{3}$$

Die sich periodisch wiederholenden Zahlen werden durch einen Strich oberhalb der Zahl gekennzeichnet.

**Reelle Zahlen**: Die reellen Zahlen werden durch den Buchstaben R bzw. $\mathbb{R}$ gekennzeichnet. In der Menge der reellen Zahlen sind alle rationalen und irrationalen Zahlen enthalten. Irrationale Zahlen sind Dezimalzahlen, die unendlich viele Nachkommastellen haben, die sich jedoch nicht periodisch wiederholen. Es sind Zahlen, die sich nicht durch das Verhältnis von zwei ganzen Zahlen darstellen lassen. Für die irrationalen Zahlen wird der Buchstabe **I** genutzt. Die bekanntesten irrationalen Zahlen sind die Kreiskonstante $\pi$ (pi) = 3,141592654... und die Eulersche Zahl $e$ = 2,718281828....

Mengendarstellung: $\mathbb{R} = \{x | x \in \mathbb{Q} \vee x \in \mathbb{I}\}$ = {x | x ist rational oder irrational}

Das Verhältnis der vorgestellten Zahlenbereiche kann man gut mit einem Venn-Diagramm veranschaulichen (vgl. Abb. 1.1).

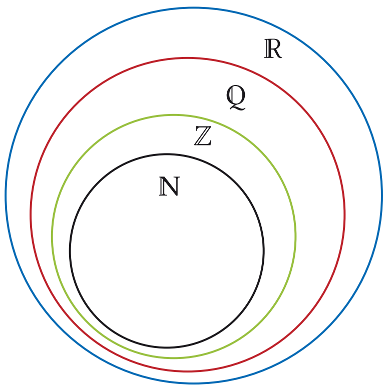


**Abb. 1.1:** Venn-Diagramm der Zahlenbereiche

**Hinweis:**

Werden die Buchstaben mit einem Plus bzw. Minus (rechts unten) gekennzeichnet, sind jeweils nur die positiven bzw. negativen Zahlen gemeint. Das bedeutet, dass mit $\mathbb{R}_+$ nur positive reelle Zahlen und mit $\mathbb{Z}_-$ nur die negativen ganzen Zahlen gemeint sind.

**Übung 1.1:**

1. Prüfen Sie, welche Aussagen bzgl. der Zugehörigkeit der Elemente zu den Zahlenbereichen stimmen.

   a) $2 \in \mathbb{R},\ 2 \in \mathbb{Z},\ 2 \in \mathbb{N}$

   b) $-1 \in \mathbb{N},\ -1 \in \mathbb{Z}_+,\ -1 \in \mathbb{Z},\ -1 \in \mathbb{Q}_-$

   c) $0{,}\overline{2} \in \mathbb{Z},\ 0{,}\overline{2} \in \mathbb{R},\ 0{,}\overline{2} \in \mathbb{Q}$

   d) $\frac{1}{6} \in \mathbb{N}, \frac{1}{6} \in \mathbb{Q}, \frac{1}{6} \in \mathbb{R}_-, \frac{1}{6} \in \mathbb{R}_+$

2. Zu welchen Zahlenbereichen gehören

   a) die Kreiskonstante $\pi$ und die Eulersche Konstante $e$?

   b) die Primzahlen?

   c) die Brüche $\frac{1}{7}, \frac{117}{13}$ und $-\frac{68}{4}$?

## 1.3 Darstellung von Mengen

Eine Menge können Sie auf verschiedene Weise darstellen. Die verbale Beschreibung von Mengen, wie wir sie im täglichen Sprachgebrauch häufig nutzen, gibt es auch bei der mathematischen Darstellung. Aber es gibt auch noch weitere Darstellungsmöglichkeiten. Sie können Mengen veranschaulichen durch folgende Darstellungsformen:

- aufzählende Darstellung
- beschreibende Darstellung
- grafische Darstellung

Bevor wir uns diese drei Darstellungsformen etwas genauer ansehen, folgt hier zunächst eine kurze Übersicht der wichtigsten Symbole, die wir für die genannten Darstellungsformen benötigen (vgl. Tab. 1.1).

**Tab. 1.1:** Symbolik der Mengenlehre

| Symbolik | Bedeutung |
|---|---|
| M1 = {a, b, c, d}<br>M2 = {d, e, f, g, h, i} | M1 ist die Menge der Elemente a, b, c und d.<br>d, e, f, g, h und i sind Elemente der Menge M2.<br>Bei der Aufzählung der Elemente einer Menge benutzt man die geschweiften Klammern { und }. |
| $\in$ | $\in$ ist im Rahmen der Mengenlehre ein Element einer Menge. |
| a $\in$ M1 | a ist Element der Menge M1. |
| **e** $\notin$ M1 | e ist nicht Element der Menge M1. |
| d $\in$ M1 $\wedge$ d $\in$ M2 | $\wedge$ ist das Symbol für „und“.<br>d ist Element der Menge M1 und der Menge M2. Es sind beide Angaben erfüllt. |
| a $\in$ M1 $\vee$ a $\in$ M2 | $\vee$ ist das Symbol für „oder“. Es muss nur eine Bedingung erfüllt sein. a ist Element von M1 oder M2. |
| $3 < 4$, $a \leq 10$ | Die Zeichen < (kleiner) und ≤ (kleiner gleich) beschreiben Beziehungen. 3 ist (echt) kleiner als 4, a ist kleiner oder gleich 10. |
| $5 > 2$, $b \geq 6$ | Die Zeichen > (größer) und ≥ (größer gleich) beschreiben ebenfalls Beziehungen. 5 ist (echt) größer als 2, b ist größer oder gleich 6. |
| | Mit den Symbolen [, ], ( und ) werden Zahlenintervalle aus dem Bereich der reellen Zahlen angegeben.<br>Dabei kennzeichnen die Klammern ( und ) offene Intervallgrenzen, wobei der angegebene Grenzwert nicht zum Intervall gehört.<br>Die Klammern [ und ] kennzeichnen geschlossene Intervallgrenzen, d.h. dass der angegebene Grenzwert zum Intervall gehört. |

| Symbolik | Bedeutung |
|---|---|
| $[1,10]$ | Das Intervall $[1, 10]$ umfasst die reellen Zahlen von 1 bis 10. |
| $(-2,20)$ | Das Intervall $(-2, 20)$ umfasst die reellen Zahlen von −2 bis 20. Die obere und untere Grenze des Intervalls (−2 und 20) gehören nicht zum Intervall. |
| $[0,6)$ | Das Intervall $[0, 6)$ umfasst die reellen Zahlen von 0 bis 6, jedoch gehört 6 nicht dazu. |
| $(0.5,3.5]$ | Das Intervall $(0.5, 3.5]$ umfasst die reellen Zahlen von 0,5 bis 3,5, jedoch gehört 0,5 nicht dazu. |

Für die Übersicht der Symbolik haben wir bereits einige Darstellungsformen benutzt. Die drei Darstellungsformen von Mengen werden im Folgenden beschrieben.

**Aufzählende Darstellung:** Bei dieser Form der Darstellung werden alle Elemente der Menge einzeln aufgezählt. Dabei müssen Sie beachten, dass gleiche Elemente nur einmal und die Elemente der Menge i.d.R. in sortierter Reihenfolge aufgeführt werden. Es ist auch üblich, die Mengen mit Großbuchstaben und die Elemente mit Kleinbuchstaben zu bezeichnen.

**Beispiel 1.4:**

| | |
|---|---|
| $M = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ | M ist die Menge der geraden Zahlen zwischen 2 und 10. |
| $A = \{a, l, n, o, p\}$ | A ist die Menge der Buchstaben, die Sie zur Bildung des Wortes „APOLLON“ benötigen. Jeder Buchstabe ist nur einmal angegeben, obwohl das „o“ und das „l“ jeweils zweimal benötigt werden. Die Buchstaben sind dem Alphabet entsprechend sortiert angegeben. |
| F = {grün, blau, rot} | Die Farben Grün, Blau und Rot sind Elemente der Menge F. |
| B = {10.02., 11.05., 15.08., 17.11.} | B ist die Menge der Daten, für die ein allgemeiner Blutspendetermin vereinbart wurde. |

**Beschreibende Darstellung:** Die Elemente einer Menge können Sie verbal mit Worten, durch Intervalle oder auch durch die Angabe von Bedingungen bzw. Beziehungen beschreiben.

**Beispiel 1.5:**

- Durch $M = \{x \mid x \text{ ist eine ungerade natürliche Zahl}\}$ wird die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen x beschrieben.
- Die Menge $I = [-10, 10)$ enthält alle Zahlen zwischen −10 und 10, wobei die 10 selbst nicht zum Intervall gehört, da die obere Intervallgrenze offen ist. Diese Menge kann auch dargestellt werden durch $I = \{x \in \mathbb{R} \mid -10 \leq x < 10\}$.

- Die Elemente der Menge $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -9 \leq x < 50\}$ sind alle x, die die vorgegebenen Bedingungen erfüllen, d.h. es sind die reellen Zahlen zwischen −9 und 50. Dabei gehört die −9 dazu, da die Gleichheit durch ≤ zugelassen ist. Die 50 ist jedoch kein Element der Menge, da nur die Kleiner-Beziehung < angegeben ist. Die Darstellung mit der Intervallschreibweise lautet: $A = [-9, 50)$.
- Zur Menge $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 10 \vee x > 20\}$ gehören alle natürlichen Zahlen, die kleiner als 10 oder größer als 20 sind. Es muss nur eine Bedingung erfüllt sein. Die Bedingung $x < 10$ mit $x \in \mathbb{N}$ erfüllen nur die Zahlen von 1 bis 9. Die Bedingung $x > 20$ mit $x \in \mathbb{N}$ dagegen erfüllen unendlich viele Zahlen. Die Menge B ist somit eine unendliche Menge.

Mit {Patientinnen der Entbindungsstation ∧ 16 ≤ Alter der Patientinnen ≤ 40} wird die Menge der Patientinnen der Entbindungsstation beschrieben, die zwischen 16 und 40 Jahre alt sind.

**Grafische Darstellung**: Die grafische Darstellung von Mengen erfolgt vor allem mit Venn-Diagrammen, benannt nach dem britischen Mathematiker *John Venn* (1834–1923). Bekannt sind insbesondere die Darstellungen von Mengen durch Kreise. Es können aber auch andere zweidimensionale geometrische Figuren verwendet werden (z.B. Drei- oder Vierecke). Die schon bekannte Menge A = {a, l, n, o, p} wird in Abb. 1.2 mit den Buchstaben zur Bildung des Wortes APOLLON gezeigt.

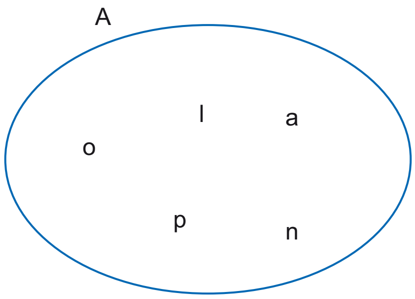


**Abb. 1.2:** Venn-Diagramm der Menge A

Durch die grafische Darstellung sollen vor allem die Beziehungen zwischen verschiedenen Mengen veranschaulicht werden.

**Beispiel 1.6:**

Die Beziehung der Mengen M1 = {1, 2, 3, 4, 5, 6} und M2 = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14} kann mit dem Venn-Diagramm (vgl. Abb. 1.3) gut dargestellt werden. Die Elemente 2, 4 und 6 sind in beiden Mengen enthalten:

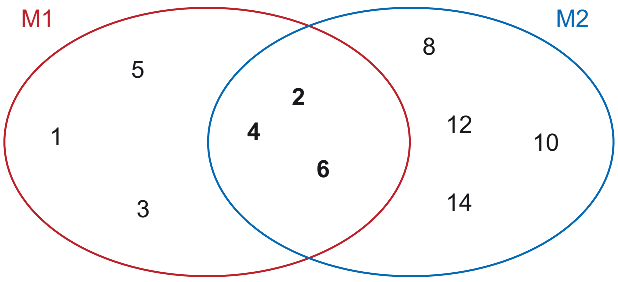


**Abb. 1.3:** Venn-Diagramm der Mengen M1 und M2

Die Beziehung zwischen den Mengen E1 = {Patientinnen der Entbindungsstation $\wedge$ 16 $\leq$ Alter der Patientinnen $\leq$ 40} und E2 = {Patientinnen der Entbindungsstation} kann mit folgendem Venn-Diagramm veranschaulicht werden (vgl. Abb. 1.4). Die Menge E1 gehört vollständig zur Menge E2:


**Abb. 1.4:** Venn-Diagramm der Mengen E1 und E2

**Übung 1.2:**

1. Geben Sie die beiden Mengen A und B in einer beschreibenden Darstellungsform an.
   $A = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40\}$
   $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
2. Geben Sie die Elemente der Mengen M und N aufzählend an.
   $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5 \vee 10 \leq x < 12 \vee 15 < x < 20 \vee 25 = x\}$
   $N = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x < 8\}$
3. Geben Sie die beiden Mengen I und J als Intervalle an.
   $I = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 5\}$
   $J = \{x \in \mathbb{R} \mid 7 < x < 55\}$
4. Welche Menge wird durch die angegebene Menge M beschrieben? Geben Sie die Elemente an.
   $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 0\}$
5. Stellen Sie die beiden Mengen B1 und B2 als Venn-Diagramm dar.
   $B1 = \{m, n, o, p, q, r, s\}$
   $B2 = \{r, s, t, u, v, w\}$

## 1.4 Mengenbeziehungen und -operationen

In diesem Abschnitt sehen wir uns an, welche Operationen Sie nutzen können, um aus mehreren bekannten Mengen eine neue Menge zu erzeugen und welche Beziehungen zwischen den Mengen bestehen können.

### 1.4.1 Teil- und Komplementärmengen sowie gleiche Mengen

Sind alle Elemente einer Menge A vollständig in einer zweiten Menge B enthalten, ist A eine Teilmenge von B. Die Menge A kann dabei auch identisch mit der Menge B sein.

> Eine Menge A heißt Teilmenge oder Untermenge einer Menge B, wenn jedes Element von A auch Element von B ist. Dargestellt wird diese Beziehung mit dem Symbol $\subseteq$:
>
> $$A \subseteq B$$

Sind in der Menge B noch weitere Elemente, die nicht gleichzeitig auch Elemente der Menge A sind, dann ist die Menge A eine echte Teilmenge der Menge B. Mit anderen Worten ist die Menge A eine echte Teilmenge der Menge B genau dann, wenn A nicht identisch mit B ist. Dann schreibt man: $A \subset B$.

Daraus können Sie ableiten, dass die Menge B mächtiger ist als die Menge A. Es gibt für die Teilmengenbeziehungen zwei Festlegungen, die Sie beachten müssen:

1. Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge M: $\{\} \subseteq M$.
2. Jede Menge M ist (unechte) Teilmenge von sich selbst: $M \subseteq M$.

**Beispiel 1.7:**

a) Die Menge der Bachelorstudierenden der APOLLON Hochschule ist eine Teilmenge der Studierenden der Hochschule. Sie sind eine echte Teilmenge, da z. B. auch die Masterstudierenden zu den Studierenden der Hochschule gehören. Stellen Sie die beiden Mengen mit einem Venn-Diagramm dar, erhalten Sie folgende Abbildung (vgl. Abb. 1.5):

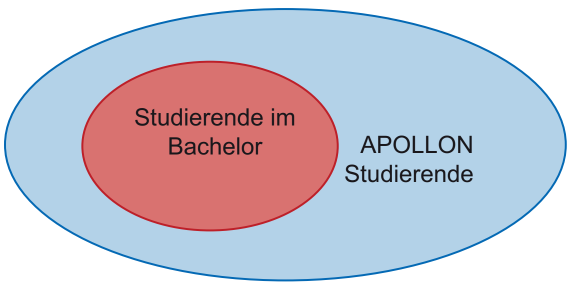


**Abb. 1.5:** Venn-Diagramm der Studierenden

b) Sehen wir uns ein Beispiel mit Zahlen an: Gegeben sind die Mengen $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 13 \wedge x \text{ gerade}\}$ und $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x\}$. Für diese vier Mengen können wir folgende Beziehungen aufstellen: $A \subset B \subseteq C \subset D$.

Dass A eine echte Teilmenge von B ist, ist leicht nachzuvollziehen. Obwohl sich die Art der Darstellung der Mengen B und C deutlich unterscheidet, besitzen beide die gleichen Elemente. Damit ist B eine Teilmenge von C, da alle Elemente von B auch Elemente von C sind. Die Menge C ist eine echte Teilmenge von D, da D alle positiven ganzen Zahlen und somit alle natürlichen Zahlen enthält.

c) Die Teilmengen-Beziehungen können Sie auch bei Mengen mit Buchstaben untersuchen: Gegeben sind die Mengen $E = \{a, b, c, d\}$, $F = \{c, d, e, f, g, h, i, j\}$, $G = \{x \in \text{Alphabet} \mid x = \text{Buchstabe zwischen a und m}\}$ und $H = \{x \mid x \in \text{Alphabet}\}$.

Die Menge E ist keine Teilmenge von F: $E \not\subseteq F$, da zur Menge E noch Elemente (die Buchstaben a und b) gehören, die nicht Elemente der Menge F sind. E wäre nur dann eine Teilmenge von F, wenn alle Elemente von E auch Elemente der Menge F wären. Die Mengen E und F sind aber echte Teilmengen der Mengen G und H, wobei G eine echte Teilmenge von H ist: $E \subset G \subset H$ und $F \subset G \subset H$.

In Beispiel 1.7 b) haben wir die Mengen B $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ und C $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 13 \wedge x \text{ gerade}\}$ verwendet, die trotz unterschiedlicher Beschreibungen die gleiche Menge darstellen. Das bedeutet $B = C$ und somit auch $B \subseteq C$ und $C \subseteq B$.

**Gleiche Menge**

Zwei Mengen A und B sind gleich, wenn jedes Element der Menge A auch Element der Menge B ist und umgekehrt: $A = B$.

Die Menge $H = \{x \mid x \in \text{Alphabet}\}$ aus dem Beispiel 1.7 c) stellt unser gesamtes Alphabet dar. Die Menge $E = \{a, b, c, d\}$ mit den Buchstaben von a bis d ist eine echte Teilmenge des Alphabets. Alle Buchstaben, die nicht zur Menge E, aber zum Alphabet gehören, stellen die Komplementärmenge der Menge E dar. Sie wird mit $\overline{E}$ symbolisiert. Um die Komplementärmenge einer gegebenen Menge zu bestimmen, benötigen Sie immer eine Grundmenge, auf die Bezug genommen wird. Die Grundmenge setzt sich dann aus der vorgegebenen Teilmenge und ihrer Komplementärmenge zusammen. In Beispiel 1.7 ist die Grundmenge die Menge H aller Buchstaben unseres Alphabets. Die Beziehung zwischen E und $\overline{E}$ kann als Venn-Diagramm dargestellt werden (vgl. Abb. 1.6):

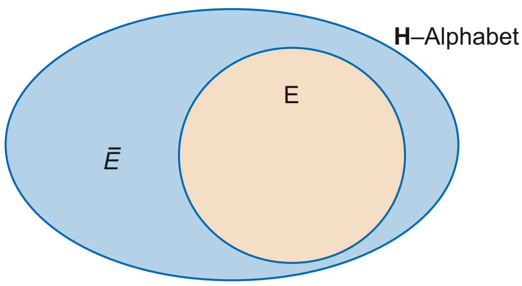


**Abb. 1.6:** Venn-Diagramm Alphabet

**Komplementärmenge**

Gegeben sei eine Grundmenge G und eine Teilmenge A von G, also A $\subseteq$ G. Die Komplementärmenge von A bzgl. der Grundmenge G sind alle Elemente der Menge G, die nicht in der Menge A enthalten sind:

$$\overline{A} = \{x \mid x \in G \wedge x \notin A\}$$

**Beispiel 1.8:**

Die Menge W der weiblichen Studierenden der APOLLON Hochschule ist eine (echte) Teilmenge der Menge S aller Studierenden der Hochschule. Die Komplementärmenge $\overline{W}$ ist die Menge der männlichen APOLLON Studierenden. Die weiblichen und männlichen Studierenden bilden zusammen die Menge aller Studierenden der Hochschule.

## 1.4.2 Vereinigungsmengen

Nehmen Sie alle Elemente der Mengen A und B in eine Menge, erhalten Sie die Vereinigungsmenge der beiden Mengen. Auch in der Vereinigungsmenge wird jedes Element nur einmal aufgezählt. In der aufzählenden Darstellung werden die Elemente – wie schon erwähnt – i.d.R. in sortierter Reihenfolge aufgeführt.

**Vereinigungsmenge**

Die Vereinigung A $\cup$ B der zwei Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die mindestens einer der beiden Mengen A oder B angehören:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

**Beispiel 1.9:**

Die Vereinigung der beiden Mengen E = {a, b, c, d} und F = {c, d, e, f, g, h, i, j} ist die Menge der Buchstaben von a bis j:

$$\mathrm{E} \cup \mathrm{F} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$$

Obwohl die Buchstaben c und d in beiden Mengen enthalten sind, werden sie in der neuen Menge nur einmal aufgezählt. Die Reihenfolge unseres Alphabets wurde bei der Aufzählung beachtet. Das dazugehörige Venn-Diagramm hat folgendes Aussehen (vgl. Abb. 1.7):

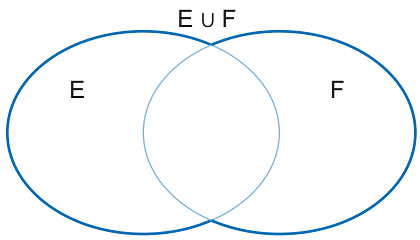


**Abb. 1.7:** Venn-Diagramm der Vereinigungsmenge

Die Vereinigung einer Menge A mit sich selbst ist wieder die Menge A: $A \cup A = A$. Da jedes Element der Menge nur einmal aufgeführt wird, führt die Vereinigung der Menge mit sich selbst nicht zur Verdopplung der Menge. Für die Vereinigung zweier Mengen A und B gilt das Kommutativgesetz: $A \cup B = B \cup A$. Es ist egal, ob Sie die Menge A mit der Menge B vereinigen oder umgekehrt. Sie bekommen in beiden Fällen die gleiche vereinigte Menge $A \cup B$.

### 1.4.3 Durchschnittsmengen

Haben zwei Mengen gemeinsame Elemente, bilden die gemeinsamen Elemente die Durchschnittsmenge der beiden vorhandenen Mengen.

**Durchschnittsmenge (Schnittmenge)**

Der Durchschnitt $A \cap B$ zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die sowohl der Menge A als auch der Menge B angehören:

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

**Beispiel 1.10:**

Die Durchschnittsmenge der Mengen E = {a, b, c, d} und F = {c, d, e, f, g, h, i, j} ist die Menge der Buchstaben c und d, da nur die beiden Buchstaben zu beiden Mengen gehören:

$$\mathrm{E} \cap \mathrm{F} = \{\mathrm{c},\ \mathrm{d}\}$$

Das dazugehörige Venn-Diagramm hat folgendes Aussehen (vgl. Abb. 1.8):

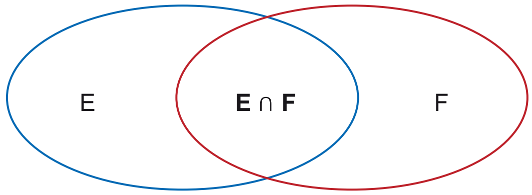


**Abb. 1.8:** Venn-Diagramm Durchschnittsmenge

Besitzen dagegen die zwei Mengen A und B kein gemeinsames Element, entspricht der Durchschnitt dieser beiden Mengen der leeren Menge: $A \cap B = \{\}$.

**Disjunkte Menge**

Zwei Mengen A und B mit $A \cap B = \{\}$ werden als disjunkte (elementfremde) Mengen bezeichnet.

**Beispiel 1.11:**

Die Durchschnittsmenge der beiden Mengen $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist eine gerade Zahl}\}$ und $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist eine ungerade Zahl}\}$ ist eine leere Menge. Eine natürliche Zahl kann nicht gleichzeitig eine gerade und eine ungerade Zahl sein.

Die Mengen A und B sind Komplementärmengen. Zusammen bilden sie die natürlichen Zahlen.

Auch bei der Durchschnittsmenge müssen Sie noch zwei Besonderheiten beachten:

1. Der Durchschnitt der Menge A mit sich selbst ist wieder die Menge A: $A \cap A = A$. Auch wenn es etwas sonderbar klingt: die gemeinsamen Elemente von A und A sind die Elemente von A.
2. Wie bei der Vereinigung gilt für den Durchschnitt der Mengen das Kommutativgesetz: $A \cap B = B \cap A$. Auch hier ist es egal, ob Sie den Durchschnitt der Menge A mit der Menge B bilden oder umgekehrt. Die Durchschnittsmenge enthält in beiden Fällen die gemeinsamen Elemente.

### 1.4.4 Differenzmengen

Zum Abschluss sehen wir uns noch die Differenz zweier Mengen A und B an. Möchten Sie die Differenz der Menge A und der Menge B bestimmen, müssen Sie von der Menge A all jene Elemente abziehen, die die Menge A mit der Menge B gemeinsam hat.

**Differenzmenge**

Die Differenz $A \setminus B$ zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente von A, die nicht zu B gehören.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

**Beispiel 1.12:**

Gegeben sind die Mengen $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ und $B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$. Für die beiden Differenzen $A \setminus B$ und $B \setminus A$ erhalten Sie:

- $A \setminus B = \{2, 6, 10\}$. Da die Elemente 4, 8 und 12 in der Menge A und der Menge B enthalten sind, werden sie von der Menge A abgezogen. Es bleiben nur die Elemente der roten Fläche übrig (vgl. Abb. 1.9):

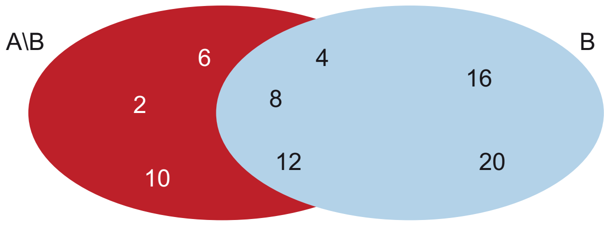


**Abb. 1.9:** Venn-Diagramm Differenzmenge I

- B \ A = {16, 20}. Da die Elemente 4, 8 und 12 in der Menge A und der Menge B enthalten sind, werden sie von der Menge B abgezogen. Es bleiben nur die Elemente der blauen Fläche übrig (vgl. Abb. 1.10):

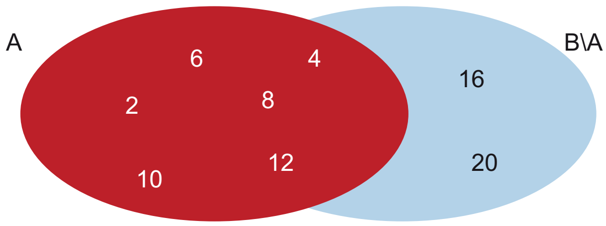


**Abb. 1.10:** Venn-Diagramm Differenzmenge II

Wie Sie in Beispiel 1.12 sehen, gilt für die Differenz von zwei Mengen A und B das Kommutativgesetz nicht. Die Differenz A \ B ergibt eine andere Menge als die Differenz B \ A. Sie müssen bei der Differenzbildung also genau aufpassen, welche Menge zuerst angegeben und welche abgezogen wird. Ziehen Sie eine Menge A von sich selbst ab: A \ A = {}, bleibt nur die leere Menge übrig, da alle gemeinsamen Elemente die Menge A selbst sind.

**Beispiel 1.13:**

Um ein guter Gastgeber zu sein, erfassen Sie vor einer Feierlichkeit von Ihren zehn Gästen (G1 bis G10), was diese gerne essen. Die Menge A gibt die Gäste an, die gerne Fleisch essen, die Menge B enthält die Gäste, die Gemüse und vegane Speisen mögen, und in der Menge C sind die Gäste zusammengefasst, die Fisch essen.

A = {G1, G3, G5, G6, G9}, B = {G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7, G8,G9, G10},
C = {G1, G2, G3, G5, G6, G9, G10}

Aus der Menge B können Sie erkennen, dass alle Gäste Gemüse bzw. veganes Essen mögen, da alle zehn Gäste angegeben sind.

Ziehen Sie von der Menge B die Menge A ab, erfahren Sie, welche Gäste Gemüse bzw. veganes Essen, aber kein Fleisch mögen: B \ A = {G2, G4, G7, G8, G10}.

Ziehen Sie von dieser Menge noch die Menge C der Fischesser ab, erhalten Sie die Information, welche Gäste nur veganes Essen bevorzugen:
(B \ A) \ C = {G4, G7, G8}.

Möchten Sie erfahren, wie viele Gäste Fisch, aber kein Fleisch möchten, ziehen Sie von der Menge C die Menge A ab. Das heißt, Sie entfernen aus der Menge der Fischesser alle Gäste, die auch gerne Fleisch essen: C \ A = {G2, G10}. Lediglich zwei Gäste möchten neben veganem Essen nur noch Fisch.

**Übung 1.3:**

1. Gegeben sind die sechs Mengen A bis F. Prüfen Sie, welche Aussagen bzgl. der Mengenbeziehungen wahr oder falsch sind.

   $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{6, 7, 8\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
   $D = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge \text{gerade Zahl} \wedge x < 20\}$, $E = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge \text{ungerade Zahl} \wedge x \leq 19\}$,
   $F = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x < 21\}$

| | $A \subseteq B$ | $B \subseteq A$ | $A \subseteq D$ | $7 \in C$ | $A = B \cup C$ | $\{4,5,6\} \subseteq D$ | $E \cap D = A$ | $B \cap D = A$ | $A \cup B = A$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| wahr | | | | | | | | | |
| falsch | | | | | | | | | |

2. Ermitteln Sie die Mengen für folgende Operationen mit den vorgegebenen Mengen A bis F von Aufgabe 1:

   a) $A \cap B$, $A \cap C$, $C \cap D$, $B \cap C$, $D \cap E$, $A \cap D$, $B \cap D$

   b) $B \cup C$, $C \cup D$, $B \cup D$, $C \cup E$

   c) $B \setminus C$, $F \setminus E$, $A \setminus B$, $D \setminus E$

   d) $A \cap B \cap C$, $A \cap C \cap D$, $B \cup C \cup E$, $A \setminus B \setminus C$, $F \setminus D \setminus E$

   e) $(A \cap D) \cup E$, $(A \cup D) \setminus B$, $(A \cap E) \setminus B$

   f) F sei die Grundmenge, $\overline{B}, \overline{E}, \overline{D}, \overline{A \cup D}$

3. Stellen Sie auf der Basis der Mengen A bis F von Aufgabe 1 für folgende Operationen die Venn-Diagramme dar.

   a) $A \cap B$

   b) $B \cup C$

   c) $B \setminus C$

## Zusammenfassung

Im Folgenden werden die wichtigsten Aspekte zu den Begriffen, der Darstellung, den Zahlenbereichen, den Beziehungen und den Operationen der Mengen zusammengefasst.

**Begriffe**: Unter einer Menge M wird die Gesamtheit bestimmter, wohlunterschiedener Objekte zu einem Ganzen verstanden. Die Objekte der Menge werden als Elemente bezeichnet. Die Anzahl der Elemente einer Menge M bestimmt die Mächtigkeit dieser Menge. Dabei unterscheidet man endliche, abzählbar unendliche und nicht abzählbar unendliche Mengen. Besitzt eine Menge M kein Element, spricht man von einer leeren Menge. Bezeichnet wird sie mit dem Symbol {} oder Ø.

**Darstellung**: Zur Charakterisierung von Mengen nutzt man

- die aufzählende Darstellung der Elemente,
- die beschreibende Darstellung mithilfe von Worten sowie der Angabe von Bedingungen und Beziehungen,
- die grafische Darstellung auf Basis der Venn-Diagramme.

**Zahlenbereiche**: Die wichtigsten Zahlenbereiche für ökonomische Betrachtungen sind:

- $\mathbb{N}$ – die natürlichen Zahlen
- $\mathbb{Z}$ – die ganzen Zahlen
- $\mathbb{Q}$ – die rationalen Zahlen
- $\mathbb{R}$ – die reellen Zahlen

Die natürlichen Zahlen sind eine Teilmenge der ganzen Zahlen, die ganzen Zahlen eine Teilmenge der rationalen Zahlen und die rationalen Zahlen eine Teilmenge der reellen Zahlen. Es gilt: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ .

**Beziehungen**: Zwischen den Mengen können verschiedene Beziehungen bestehen:

| | |
|---|---|
| Teilmenge | Eine Menge A ist Teilmenge von B: A $\subseteq$ B, wenn alle Elemente von A auch Elemente von B sind. |
| gleiche Menge | Zwei Mengen A und B sind gleich: A = B, wenn alle Elemente der Menge A auch Elemente der Menge B sind und umgekehrt. |
| Komplementärmenge | Ist die Menge A eine Teilmenge einer Grundmenge G, bilden alle Elemente der Grundmenge G, die nicht Element der Menge A sind, die Komplementärmenge: $\overline{A} = \{x \mid x \in G \wedge x \notin A\}$ |

**Operationen**: Mit den Mengen können verschiedene Operationen zur Bestimmung neuer Mengen durchgeführt werden:

| | |
|---|---|
| Vereinigungsmenge | Bei der Vereinigung zweier Mengen werden alle Elemente der Menge A und der Menge B zu einer Menge zusammengefasst: $A \bigcup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ Dabei wird jedes Element nur einmal aufgeführt. |

| | |
|---|---|
| Durchschnittsmenge | Bei der Bildung der Durchschnittsmenge zweier Mengen werden alle Elemente zusammengefasst, die sowohl in der einen als auch in der anderen Menge enthalten sind.<br><br>$A \bigcap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$<br><br>Haben zwei Mengen A und B keine gemeinsamen Elemente, d.h. keinen Durchschnitt, sind sie disjunkte Mengen. |
| Differenzmenge | In der Differenzmenge zweier Mengen A und B: A \ B sind alle Elemente von A, die nicht gleichzeitig Elemente von B sind. Es werden von A nur die Elemente abgezogen, die auch in der Menge B vorhanden sind:<br><br>$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ |

## Aufgaben zur Selbstüberprüfung

1.1 Gegeben sind die Mengen:

$C_1 = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge -5 \le x < 2\}$, $C_2 = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge 0 < x \le 100\}$,
$C_3 = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge 2 < x < 5\}$ und $C_4 = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge -1 \le x\}$.

a) Geben Sie die Mengen $C_1$ und $C_3$ in aufzählender Form an.

b) Sind folgende Beziehungen richtig?

$C_3 \subseteq C_2$, $C_3 \subseteq C_1$, $C_2 \subseteq C_1$ und $C_2 \cup C_3 = C_2$

c) Ermitteln Sie:

- $C_1 \cup C_2$, $C_2 \cup C_3 \cup C_4$
- $C_3 \cap C_4$, $C_1 \cap C_2 \cap C_3$
- $C_1 \setminus C_4$, $C_1 \setminus C_2 \setminus C_3$

1.2 Geben Sie die angegebenen Mengen in aufzählender Form an:

a) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge -10 < x \le 5\}$

b) $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \le 7\}$

c) $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}_- \wedge x \ge 0\}$

d) $D = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z} \wedge -2 \le x \le 4\}$

1.3 $G = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge 1 \le x \le 12\}$ sei die Grundmenge. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $B = \{x \mid x$ ist eine gerade Zahl $\wedge\ 1 < x < 13\}$ sind Teilmengen von G. Geben Sie die Komplementärmengen $\overline{A}$ und $\overline{B}$ in beschreibender oder aufzählender Form an.

1.4 Gegeben sind die Mengen A, B, C und D. Schraffieren Sie:

a) $A \cup B \cup C$

b) $A \cap B \cap C$

c) $C \setminus B$

d) $\overline{B}$